Vektor

Jedes Zahlenpaar $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ heißt **Vektor**. Die Zahlen $a_1,\ a_2 \in \mathbb{R}$ heißen **Komponenten** des Vektors.

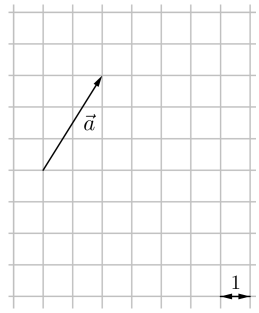
Vektor als Pfeil veranschaulichen

Wir können jeden Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ grafisch als Verschiebung deuten:

a_1 . . . Verschiebung in horizontaler Richtung
a_2 . . . Verschiebung in vertikaler Richtung

Im Raster rechts ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ grafisch als Pfeil dargestellt.

Der Anfangspunkt des Pfeils („Fuß “) wird zum Endpunkt des Pfeils („Spitze“) verschoben.



Zeichne die folgenden Vektoren als Pfeile im Raster ein:

1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ **3)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ **4)** $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **5)** $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Addition von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ werden komponentenweise addiert:

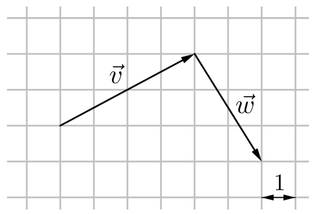
$$\boldsymbol{\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}}$$

Addition von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Summe der Vektoren:

$$\vec{v} + \vec{w} = \boxed{\qquad\qquad}$$



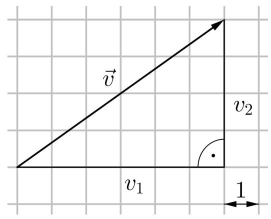
b) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts grafisch dargestellt.
Der Endpunkt von $\vec{v}$ ist der Anfangspunkt von $\vec{w}$.
Zeichne den Vektor $\vec{v} + \vec{w}$ so ein, dass er den gleichen Anfangspunkt wie $\vec{v}$ hat. Was fällt dir auf?

Länge eines Vektors

Für die **Länge** (**„Betrag“**) eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ schreiben wir $|\boldsymbol{\vec{v}}|$.

Stelle eine Formel für $|\vec{v}|$ in Abhängigkeit von v_1 und v_2 auf,
und berechne die Länge des rechts dargestellten Vektors $\vec{v}$:

$$|\vec{v}| = \boxed{\qquad\qquad}$$



Multiplikation mit einem Skalar

Jeder Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ kann mit jeder reellen Zahl r komponentenweise multipliziert werden:

$$\boldsymbol{r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \end{pmatrix}}$$

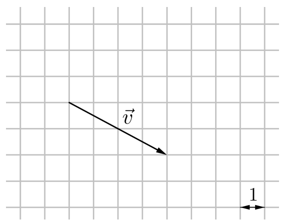
In der Vektorrechnung wird für die Zahl $r \in \mathbb{R}$ auch der Begriff **Skalar** verwendet.

Multiplikation mit einem Skalar

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist rechts grafisch dargestellt.
Berechne die folgenden Vektoren, und stelle sie rechts als Pfeile dar:

1) $2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \boxed{\,} \\ \boxed{\,} \end{pmatrix}$ **2)** $\frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \boxed{\,} \\ \boxed{\,} \end{pmatrix}$ **3)** $(-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} \boxed{\,} \\ \boxed{\,} \end{pmatrix}$

Was fällt dir an den Pfeilen auf?



Richtung / Orientierung

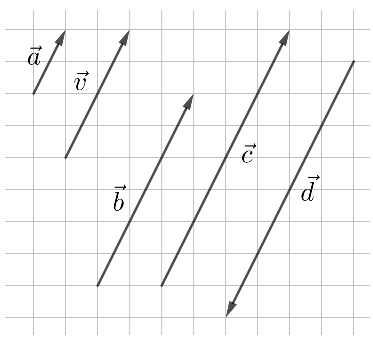
Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ haben dieselbe **Richtung**, wenn $\vec{w} = r \cdot \vec{v}$ mit einer Zahl $r \neq 0$ gilt.

Wir schreiben dann $\vec{v} \parallel \vec{w}$ und sagen: „Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind **parallel**.“ $\vec{v} \neq \binom{0}{0}$, $\vec{w} \neq \binom{0}{0}$

Zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ haben dieselbe **Orientierung**, wenn $\vec{w} = r \cdot \vec{v}$ mit einer Zahl $r > 0$ gilt.

Skalierung

Die rechts dargestellten Vektoren haben alle die gleiche Richtung. $\vec{d}$ ist aber *nicht* gleich orientiert wie $\vec{v}$.



a) Trage die passenden Zahlen in die Lücken ein.

$\vec{a} = \boxed{} \cdot \vec{v}$ $\quad$ $\vec{b} = \boxed{} \cdot \vec{v}$ $\quad$ $\vec{c} = \boxed{} \cdot \vec{v}$ $\quad$ $\vec{d} = \boxed{} \cdot \vec{v}$

b) Es gilt $\vec{v} = \binom{2}{4}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{7}$. Berechne w_1 so, dass $\vec{v} \parallel \vec{w}$ gilt.

Tatsächlich ist die Länge von $r \cdot \vec{v}$ das $|r|$-fache der Länge von $\vec{v}$:

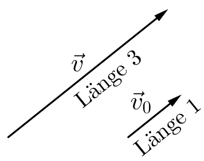
$$|r \cdot \vec{v}| = \left|\binom{r \cdot v_1}{r \cdot v_2}\right| = \sqrt{(r \cdot v_1)^2 + (r \cdot v_2)^2} = \sqrt{r^2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |r| \cdot |\vec{v}|$$

Einheitsvektor

Der Vektor $\boldsymbol{\vec{v_0} = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}}$ hat die gleiche Richtung und Orientierung wie $\vec{v}$.

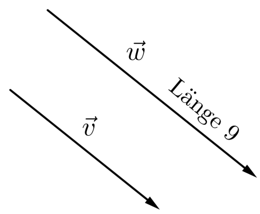
Seine Länge ist $|\vec{v_0}| = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot |\vec{v}| = 1$.

Wir nennen $\boldsymbol{\vec{v_0}}$ den **Einheitsvektor von $\boldsymbol{\vec{v}}$**.



Vektor auf bestimmte Länge skalieren

Die Vektoren $\vec{v} = \binom{4}{-3}$ und $\vec{w}$ sind parallel und gleich orientiert. Berechne den Vektor $\vec{w}$ mit Länge 9.

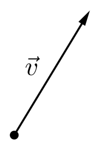


Vektor und Gegenvektor

Jeder Vektor $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ hat seinen **Gegenvektor** $\boldsymbol{-\vec{v} = \binom{-v_1}{-v_2}}$.

Wie bei der Zahl 42 und ihrer Gegenzahl -42 ist das „$-$“ ein Vorzeichen.

Zeichne rechts den Gegenvektor von $\vec{v}$ mit dem gleichen Anfangspunkt ein.



Die Summe von Vektor und Gegenvektor ergibt den **Nullvektor**:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \binom{v_1}{v_2} + \binom{-v_1}{-v_2} = \binom{v_1 - v_1}{v_2 - v_2} = \boldsymbol{\binom{0}{0}}$$

Subtraktion von Vektoren

Zwei Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ werden komponentenweise subtrahiert:

$$\boldsymbol{\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w}) = \binom{v_1 - w_1}{v_2 - w_2}}$$

Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \binom{6}{4}$ und $\vec{w} = \binom{4}{-2}$.

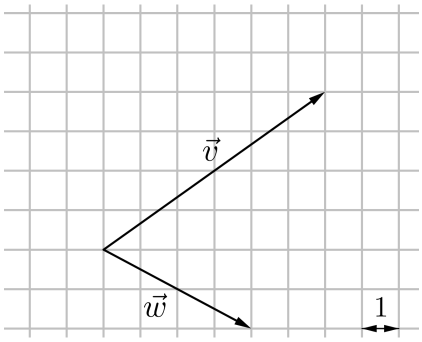
a) Berechne die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$:

$\vec{v} - \vec{w} =$ $\boxed{}$

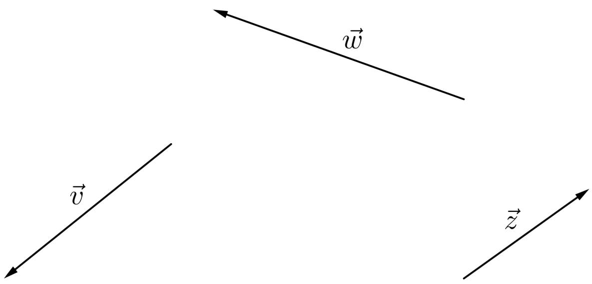
b) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts grafisch dargestellt.
Um $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch darzustellen, gibt es zwei Denkmöglichkeiten:

1) $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} +$ _____ **2)** $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) =$ _____

Zeichne $\vec{v} - \vec{w}$ auf beide Arten rechts ein.

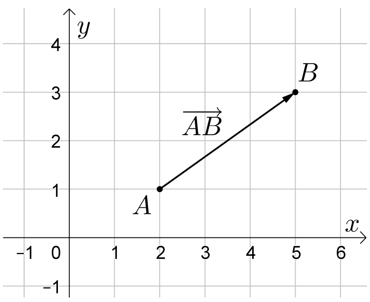


Stelle die Vektoren $\vec{w} + \vec{z}$, $2 \cdot \vec{z}$, $-\frac{1}{2} \cdot \vec{w}$ und $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch dar.



„Spitze-minus-Fuß – Regel“

Im Koordinatensystem unten sind zwei Punkte A und B eingezeichnet.
Für den Vektor mit Anfangspunkt A und Endpunkt B schreiben wir auch kurz $\overrightarrow{AB}$.



1) Lies die Koordinaten der Punkte ab:

A $\boxed{}$ B $\boxed{}$

2) Lies die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ab:

$\overrightarrow{AB} = \binom{\square}{\square}$

Für alle Punkte A $(a_1 \mid a_2)$ und B $(b_1 \mid b_2)$ gilt allgemein: $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \binom{b_1 - a_1}{b_2 - a_2}}$

Koordinatengeometrie

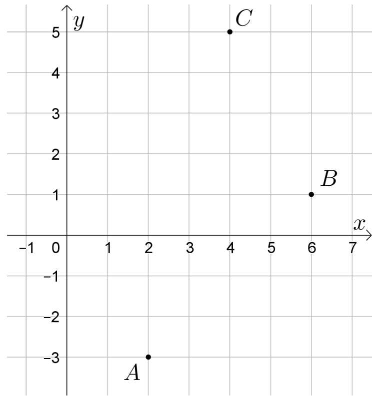
Berechne die Komponenten der folgenden Vektoren:

$\overrightarrow{AB} = \boxed{}$ $\qquad \overrightarrow{BC} = \boxed{}$

$\overrightarrow{AC} = \boxed{}$ $\qquad \overrightarrow{BA} = \boxed{}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ Warum gilt allgemein $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$?

$-\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$ Warum gilt allgemein $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$?

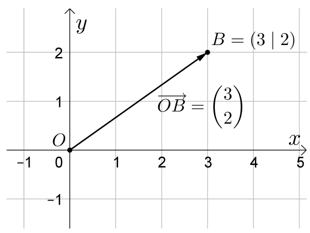


Ortsvektor

Befindet sich der Anfangspunkt eines Vektors im Koordinatenursprung $O = (0 \mid 0)$, nennen wir den Vektor $\overrightarrow{OB} = \binom{b_1}{b_2}$ auch **Ortsvektor**.

Punkt: $B \ (b_1 \mid b_2)$ (Zeilenschreibweise)

Ortsvektor: $\overrightarrow{OB} = \binom{b_1}{b_2}$ (Spaltenschreibweise)



Normalvektoren

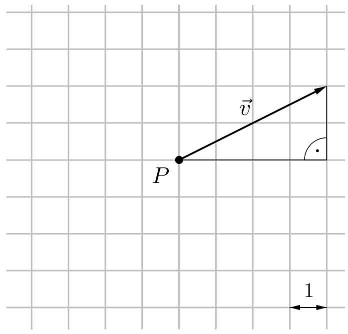
Wir drehen den Vektor $\vec{v} = \binom{4}{2}$ ...

... um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Dann erhalten wir den Vektor $\vec{v_L} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$. Zeichne ihn rechts ein.

... um 90° im Uhrzeigersinn.

Dann erhalten wir den Vektor $\vec{v_R} = \begin{pmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{pmatrix}$. Zeichne ihn rechts ein.



Die Vektoren $\boldsymbol{\vec{v_L} = \binom{-v_2}{v_1}}$ und $\boldsymbol{\vec{v_R} = \binom{v_2}{-v_1}}$ heißen daher auch **Normalvektoren von** $\boldsymbol{\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}}$.

Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{w_2}$ ist

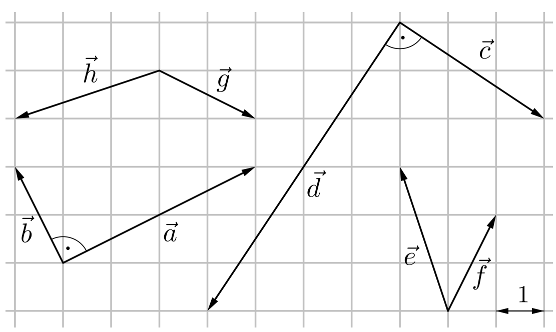
$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \binom{v_1}{v_2} \cdot \binom{w_1}{w_2} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2}.$$

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} =$

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} =$

3) $\vec{e} \cdot \vec{f} =$

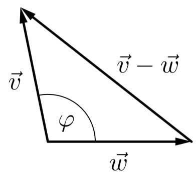
4) $\vec{g} \cdot \vec{h} =$



Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?

Vektor-Winkel-Formel

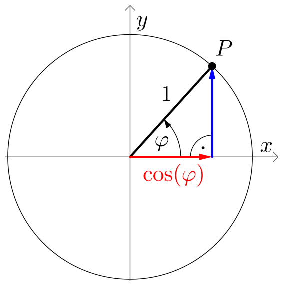
Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind mit dem *gleichen* Anfangspunkt eingezeichnet.
Für den eingeschlossenen Winkel φ gilt:

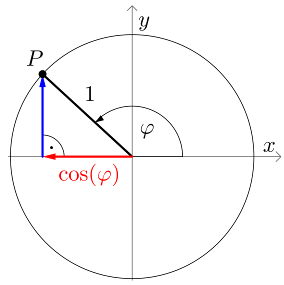


$$\boldsymbol{\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}}$$

Überlege mit dem Einheitskreis bzw. der Vektor-Winkel-Formel, ob $<$, $>$ oder $=$ in die Lücken passt:

$\varphi = 0°$	$\cos(\varphi)\ \square\ 1$	$\vec{v} \cdot \vec{w}\ \square\ 0$
$0° < \varphi < 90°$	$\cos(\varphi)\ \square\ 0$	$\vec{v} \cdot \vec{w}\ \square\ 0$
$\varphi = 90°$	$\cos(\varphi)\ \square\ 0$	$\vec{v} \cdot \vec{w}\ \square\ 0$
$90° < \varphi < 180°$	$\cos(\varphi)\ \square\ 0$	$\vec{v} \cdot \vec{w}\ \square\ 0$
$\varphi = 180°$	$\cos(\varphi)\ \square\ -1$	$\vec{v} \cdot \vec{w}\ \square\ 0$

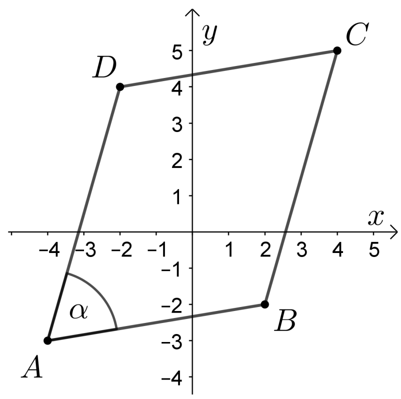




Rechts ist ein Parallelogramm mit $A(-4 \mid -3)$, $B(2 \mid -2)$ und $D(-2 \mid 4)$ dargestellt.

a) Berechne die Koordinaten des Eckpunkts C.

b) Berechne den eingezeichneten Winkel α.



Herleitung der Vektor-Winkel-Formel

Zur Herleitung der Vektor-Winkel-Formel rechnen wir $|\vec{v} - \vec{w}|^2$ auf zwei verschiedene Arten aus:

1) Berechnung mit dem Kosinussatz:

$$|\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{w}|^2 - 2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2 \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi)$$

2) Berechnung mit der Formel für die Länge eines Vektors:

$$\begin{aligned} |\vec{v} - \vec{w}|^2 = |\left(\begin{smallmatrix} v_1 - w_1 \\ v_2 - w_2 \end{smallmatrix}\right)|^2 &= (v_1 - w_1)^2 + (v_2 - w_2)^2 = \\ &= v_1^2 - 2 \cdot v_1 \cdot w_1 + w_1^2 + v_2^2 - 2 \cdot v_2 \cdot w_2 + w_2^2 = \\ &= v_1^2 + v_2^2 + w_1^2 + w_2^2 - 2 \cdot \underbrace{(v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2)}_{= \vec{v} \cdot \vec{w}} \end{aligned}$$

Durch Gleichsetzen erhalten wir die behauptete Formel:

$$\Longrightarrow \quad |\vec{v}| \cdot |\vec{w}| \cdot \cos(\varphi) = \vec{v} \cdot \vec{w} \quad \Longrightarrow \quad \cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Höherdimensionale Vektoren

Jedes Zahlentripel $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ heißt **3-dimensionaler Vektor**. Was ist wohl ein 42-dimensionaler Vektor?

Vektorrechnen

Mit höherdimensionalen Vektoren rechnen wir genauso wie mit Vektoren in der Ebene:

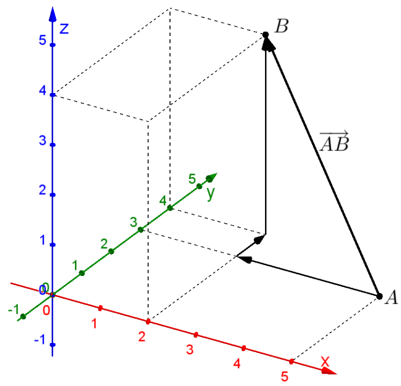
- **Addition von Vektoren:** $\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1+w_1 \\ v_2+w_2 \\ v_3+w_3 \end{pmatrix}$
- **Multiplikation mit einem Skalar:** $r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}$
- **Gegenvektor eines Vektors:** $-\vec{v} = \begin{pmatrix} -v_1 \\ -v_2 \\ -v_3 \end{pmatrix}$
- **Subtraktion von Vektoren:** $\vec{v} - \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1-w_1 \\ v_2-w_2 \\ v_3-w_3 \end{pmatrix}$

„Spitze-minus-Fuß – Regel“

Die Punkte $A\,(\square \mid \square \mid \square)$ und $B\,(\square \mid \square \mid \square)$ sind im 3-dimensionalen Raum dargestellt.
Wir können jeden 3-dimensionalen Vektor grafisch als Pfeil im Raum darstellen.

$\overrightarrow{AB}$ ist der Vektor mit Anfangspunkt A und Endpunkt B.

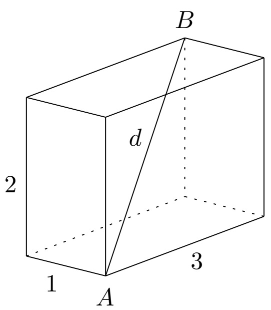
Ermittle seine Komponenten: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$



Auch im Raum gilt die **Spitze-minus-Fuß – Regel** für alle Punkte $A\,(a_1 \mid a_2 \mid a_3)$ und $B\,(b_1 \mid b_2 \mid b_3)$:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$$

Raumdiagonale eines Quaders



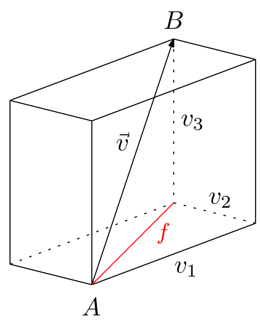
Berechne die Entfernung d der dargestellten Eckpunkte A und B des Quaders. (Einheiten in cm)

Betrag eines Vektors

Für die **Länge** (**Betrag**) des 3-dimensionalen Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

Begründe die Formel:



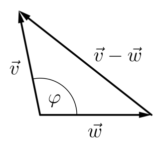
Skalarprodukt

Das **Skalarprodukt** zweier Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ ist die folgende *Zahl* (Skalar):

$$\boldsymbol{\vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = v_1 \cdot w_1 + v_2 \cdot w_2 + v_3 \cdot w_3}$$

Vektor-Winkel-Formel

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind mit dem *gleichen* Anfangspunkt eingezeichnet.
Für den eingeschlossenen Winkel φ gilt:



$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Wie in der Ebene gilt für den Winkel φ also auch im Raum:
$$\begin{cases} 0 \leq \varphi < 90^\circ & \iff \vec{v} \cdot \vec{w} \; \boxed{} \; 0 \\ \varphi = 90^\circ & \iff \vec{v} \cdot \vec{w} \; \boxed{} \; 0 \\ 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ & \iff \vec{v} \cdot \vec{w} \; \boxed{} \; 0 \end{cases}$$

Vektorprodukt

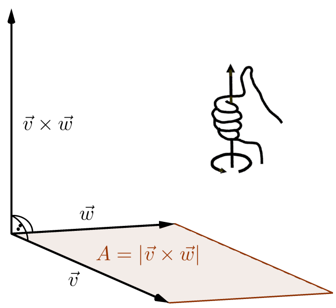
Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist der folgende *Vektor*:

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ w_1 \cdot v_3 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

Sprechweise: „$\vec{v}$ kreuz $\vec{w}$“
„Kreuzprodukt“

1) Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht normal auf $\vec{v}$ und auf $\vec{w}$.
Damit ist die *Richtung* von $\vec{v} \times \vec{w}$ festgelegt.

2) Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem.
Strecke den rechten Daumen in Richtung $\vec{v} \times \vec{w}$ und schraube mit dem Handgelenk.
Dann wird der Vektor $\vec{v}$ auf dem *kürzeren* Weg zum Vektor $\vec{w}$ gedreht.
Damit ist die *Orientierung* von $\vec{v} \times \vec{w}$ festgelegt.



3) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen ein Parallelogramm auf.
Der Flächeninhalt A dieses Parallelogramms ist $|\vec{v} \times \vec{w}|$.
Damit ist die *Länge* von $\vec{v} \times \vec{w}$ festgelegt.

Dreieck

Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A\,(3 \mid -2 \mid 4)$, $B\,(1 \mid 4 \mid -2)$ und $C\,(0 \mid -2 \mid 3)$.

1) Berechne den Winkel α, den die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einschließen.

2) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks. (Einheiten in cm)