Vektor als Pfeil veranschaulichen

Wir können jeden Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ grafisch als Verschiebung deuten:

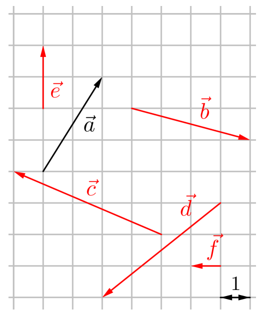
a_1 … Verschiebung in horizontaler Richtung
a_2 … Verschiebung in vertikaler Richtung

Im Raster rechts ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ grafisch als Pfeil dargestellt.

Der Anfangspunkt des Pfeils („Schaft“) wird zum Endpunkt des Pfeils („Spitze“) verschoben.

Zeichne die folgenden Vektoren als Pfeile im Raster ein:

1) $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ **2)** $\vec{c} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ **3)** $\vec{d} = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ **4)** $\vec{e} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ **5)** $\vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

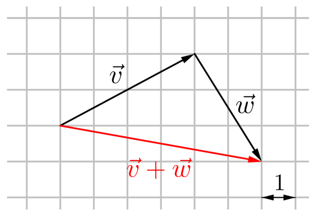


Addition von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

a) Berechne die Summe der Vektoren:

$$\vec{v} + \vec{w} = \begin{pmatrix} 4+2 \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix}$$

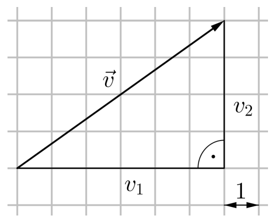


Länge eines Vektors

Für die **Länge** (**„Betrag“**) eines Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ schreiben wir $|\vec{v}|$.

Stelle eine Formel für $|\vec{v}|$ in Abhängigkeit von v_1 und v_2 auf,
und berechne die Länge des rechts dargestellten Vektors $\vec{v}$:

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} = 7{,}211...$$

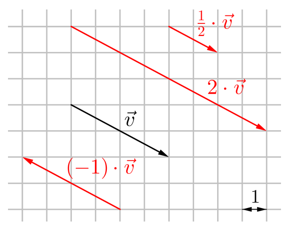


Multiplikation mit einem Skalar

Der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ ist rechts grafisch dargestellt.
Berechne die folgenden Vektoren, und stelle sie rechts als Pfeile dar:

1) $2 \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$ **2)** $\frac{1}{2} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ **3)** $(-1) \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$

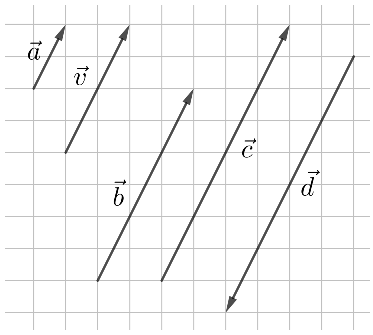
Was fällt dir an den Pfeilen auf?



Skalierung

Die rechts dargestellten Vektoren haben alle die gleiche Richtung.

$\vec{d}$ ist aber *nicht* gleich orientiert wie $\vec{v}$.



a) Trage die passenden Zahlen in die Lücken ein.

$$\vec{a} = \frac{1}{2} \cdot \vec{v} \qquad \vec{b} = \frac{3}{2} \cdot \vec{v} \qquad \vec{c} = 2 \cdot \vec{v} \qquad \vec{d} = -2 \cdot \vec{v}$$

b) Es gilt $\vec{v} = \binom{2}{4}$ und $\vec{w} = \binom{w_1}{7}$. Berechne w_1 so, dass $\vec{v} \parallel \vec{w}$ gilt.

$$\vec{w} = r \cdot \vec{v} \implies 7 = 4 \cdot r \implies r = \frac{7}{4} \implies w_1 = 2 \cdot r = \frac{7}{2}$$

Tatsächlich ist die Länge von $r \cdot \vec{v}$ das $|r|$-fache der Länge von $\vec{v}$:

$$|r \cdot \vec{v}| = \left|\binom{r \cdot v_1}{r \cdot v_2}\right| = \sqrt{(r \cdot v_1)^2 + (r \cdot v_2)^2} = \sqrt{r^2 \cdot (v_1^2 + v_2^2)} = \sqrt{r^2} \cdot \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = |r| \cdot |\vec{v}|$$

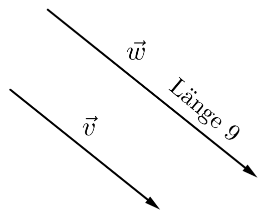
Vektor auf bestimmte Länge skalieren

Die Vektoren $\vec{v} = \binom{4}{-3}$ und $\vec{w}$ sind parallel und gleich orientiert. Berechne den Vektor $\vec{w}$ mit Länge 9.

$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

$\vec{v_0} = \frac{1}{5} \cdot \binom{4}{-3} = \binom{0{,}8}{-0{,}6}$

$\vec{w} = 9 \cdot \vec{v_0} = \binom{7{,}2}{-5{,}4}$

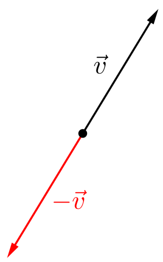


Vektor und Gegenvektor

Jeder Vektor $\vec{v} = \binom{v_1}{v_2}$ hat seinen **Gegenvektor** $\boldsymbol{-\vec{v} = \binom{-v_1}{-v_2}}$.

Wie bei der Zahl 42 und ihrer Gegenzahl −42 ist das „−“ ein Vorzeichen.

Zeichne rechts den Gegenvektor von $\vec{v}$ mit dem gleichen Anfangspunkt ein.



Die Summe von Vektor und Gegenvektor ergibt den **Nullvektor**:

$$\vec{v} + (-\vec{v}) = \binom{v_1}{v_2} + \binom{-v_1}{-v_2} = \binom{v_1 - v_1}{v_2 - v_2} = \boldsymbol{\binom{0}{0}}$$

Subtraktion von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{v} = \binom{6}{4}$ und $\vec{w} = \binom{4}{-2}$.

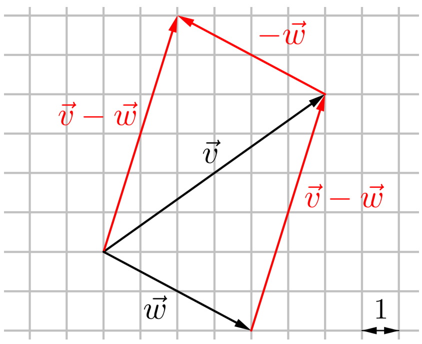
a) Berechne die Differenz $\vec{v} - \vec{w}$:

$$\vec{v} - \vec{w} = \binom{6-4}{4-(-2)} = \binom{2}{6}$$

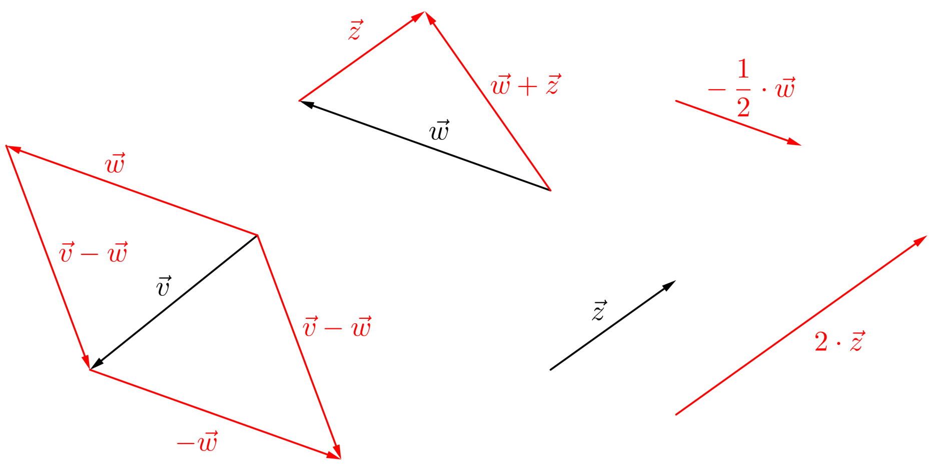
b) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind rechts grafisch dargestellt.
Um $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch darzustellen, gibt es zwei Denkmöglichkeiten:

1) $\vec{v} - \vec{w} = \vec{v} + (-\vec{w})$ **2)** $\vec{w} + (\vec{v} - \vec{w}) = \vec{v}$

Zeichne $\vec{v} - \vec{w}$ auf beide Arten rechts ein.

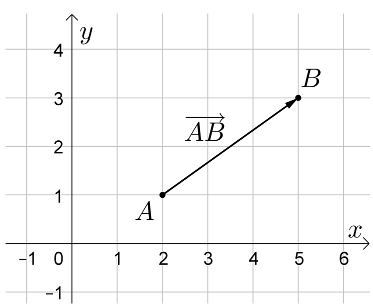


Stelle die Vektoren $\vec{w} + \vec{z}$, $2 \cdot \vec{z}$, $-\frac{1}{2} \cdot \vec{w}$ und $\vec{v} - \vec{w}$ grafisch dar.



„Spitze-minus-Fuß – Regel“

Im Koordinatensystem unten sind zwei Punkte A und B eingezeichnet.
Für den Vektor mit Anfangspunkt A und Endpunkt B schreiben wir auch kurz $\overrightarrow{AB}$.



1) Lies die Koordinaten der Punkte ab:

A $(2 \mid 1)$ B $(5 \mid 3)$

2) Lies die Komponenten des Vektors $\overrightarrow{AB}$ ab:

$\overrightarrow{AB} = \binom{3}{2}$

Für alle Punkte $A\,(a_1 \mid a_2)$ und $B\,(b_1 \mid b_2)$ gilt allgemein: $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \binom{b_1-a_1}{b_2-a_2}}$

Koordinatengeometrie

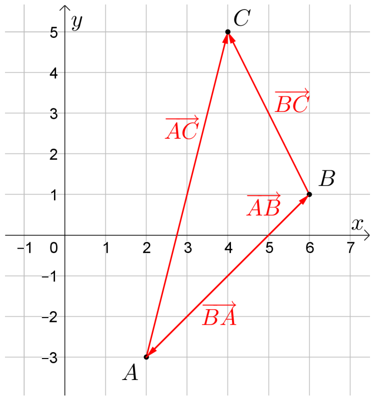
Berechne die Komponenten der folgenden Vektoren:

$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 6-2 \\ 1-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4-6 \\ 5-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ 5-(-3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ $\qquad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 2-6 \\ -3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 8 \end{pmatrix}$ Warum gilt allgemein $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$?

$-\overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$ Warum gilt allgemein $-\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB}$?



Normalvektoren

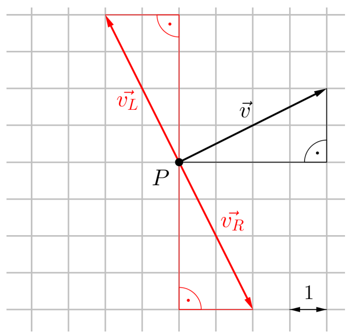
Wir drehen den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ …

… um 90° gegen den Uhrzeigersinn.

Dann erhalten wir den Vektor $\vec{v_L} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. Zeichne ihn rechts ein.

… um 90° im Uhrzeigersinn.

Dann erhalten wir den Vektor $\vec{v_R} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$. Zeichne ihn rechts ein.



Die Vektoren $\boldsymbol{\vec{v_L} = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}}$ und $\boldsymbol{\vec{v_R} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}}$ heißen daher auch **Normalvektoren von** $\boldsymbol{\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}}$.

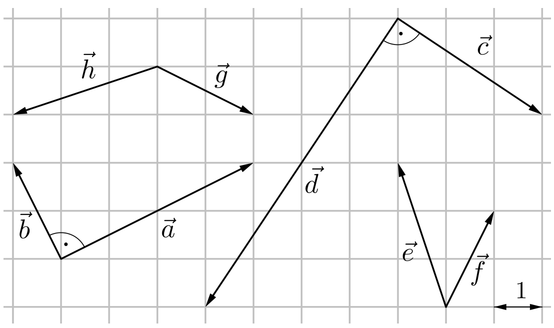
Skalarprodukt und Winkel

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = -4 + 4 = 0$

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} = -12 + 12 = 0$

3) $\vec{e} \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + 6 = 5$

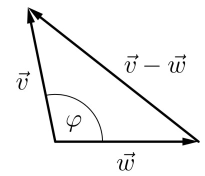
4) $\vec{g} \cdot \vec{h} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \end{pmatrix} = -6 + 1 = -5$



Zwischen dem Skalarprodukt zweier Vektoren und dem eingeschlossenen Winkel gibt es einen Zusammenhang. Hast du eine Idee?

Vektor-Winkel-Formel

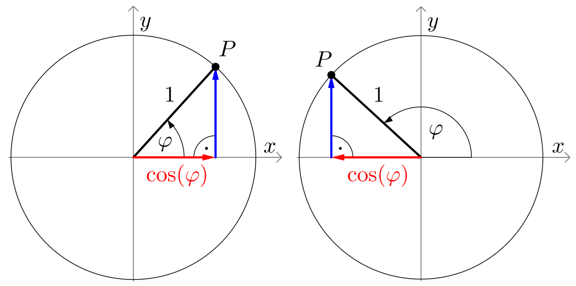
Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind mit dem *gleichen* Anfangspunkt eingezeichnet.
Für den eingeschlossenen Winkel φ gilt:



$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Überlege mit dem Einheitskreis bzw. der Vektor-Winkel-Formel, ob $<$, $>$ oder $=$ in die Lücken passt:

$\varphi = 0°$	$\cos(\varphi) = 1$	$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$
$0° < \varphi < 90°$	$\cos(\varphi) > 0$	$\vec{v} \cdot \vec{w} > 0$
$\varphi = 90°$	$\cos(\varphi) = 0$	$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$
$90° < \varphi < 180°$	$\cos(\varphi) < 0$	$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$
$\varphi = 180°$	$\cos(\varphi) = -1$	$\vec{v} \cdot \vec{w} < 0$

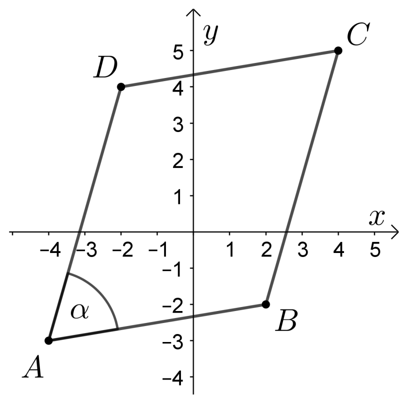


Parallelogramm

Rechts ist ein Parallelogramm mit $A\,(-4 \mid -3)$, $B\,(2 \mid -2)$ und $D\,(-2 \mid 4)$ dargestellt.

a) Berechne die Koordinaten des Eckpunkts C.

b) Berechne den eingezeichneten Winkel α.



a) $C\,(4 \mid 5)$

b) $\overrightarrow{AB} = \binom{6}{1}$, $\overrightarrow{AD} = \binom{2}{7}$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \binom{6}{1} \cdot \binom{2}{7} = 12 + 7 = 19$$

$$|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{37} \cdot \sqrt{53}$$

$$\Longrightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{19}{\sqrt{37 \cdot 53}}\right) = 64{,}59...°$$

„Spitze-minus-Fuß – Regel“

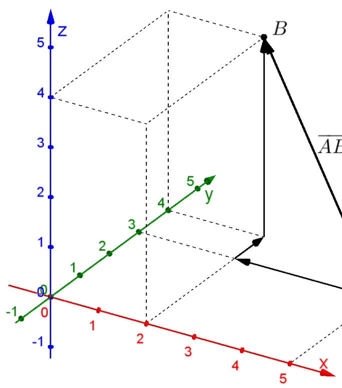
Die Punkte $A\,(5\mid 3\mid 0)$ und $B\,(2\mid 4\mid 4)$ sind im 3-dimensionalen Raum dargestellt. Wir können jeden 3-dimensionalen Vektor grafisch als Pfeil im Raum darstellen.

$\overrightarrow{AB}$ ist der Vektor mit Anfangspunkt A und Endpunkt B.

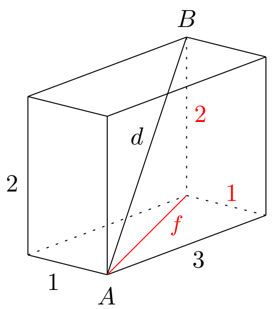
Ermittle seine Komponenten: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Auch im Raum gilt die **Spitze-minus-Fuß – Regel** für alle Punkte $A\,(a_1\mid a_2\mid a_3)$ und $B\,(b_1\mid b_2\mid b_3)$:

$$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}}$$



Raumdiagonale eines Quaders



Berechne die Entfernung d der dargestellten Eckpunkte A und B des Quaders. (Einheiten in cm)

$$f = \sqrt{3^2 + 1^2}$$

$$d = \sqrt{f^2 + 2^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{14} = 3{,}741\ldots\,\text{cm}$$

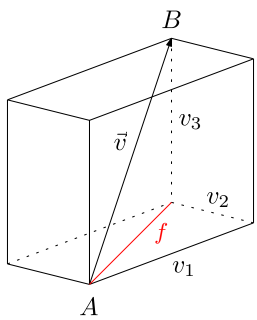
Betrag eines Vektors

Für die **Länge** (**Betrag**) des 3-dimensionalen Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ gilt:

$$\boldsymbol{|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

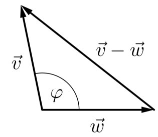
Begründe die Formel:

$$f = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} \implies |\vec{v}| = \sqrt{f^2 + v_3^2} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$



Vektor-Winkel-Formel

Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ sind mit dem *gleichen* Anfangspunkt eingezeichnet.
Für den eingeschlossenen Winkel φ gilt:



$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{w}|}$$

Wie in der Ebene gilt für den Winkel φ also auch im Raum: $\begin{cases} 0 \leq \varphi < 90^\circ & \iff \quad \vec{v} \cdot \vec{w} > 0 \\ \varphi = 90^\circ & \iff \quad \vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \\ 90^\circ < \varphi \leq 180^\circ & \iff \quad \vec{v} \cdot \vec{w} < 0 \end{cases}$

Vektorprodukt

Das **Vektorprodukt** zweier Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ ist der folgende *Vektor*:

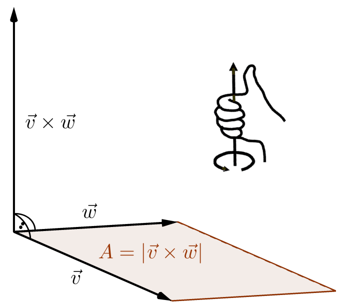
Sprechweise: „$\vec{v}$ kreuz $\vec{w}$“
„Kreuzprodukt“

$$\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_2 \cdot w_3 - w_2 \cdot v_3 \\ w_1 \cdot v_3 - v_1 \cdot w_3 \\ v_1 \cdot w_2 - w_1 \cdot v_2 \end{pmatrix}$$

1) Der Vektor $\vec{v} \times \vec{w}$ steht normal auf $\vec{v}$ und auf $\vec{w}$.
Damit ist die *Richtung* von $\vec{v} \times \vec{w}$ festgelegt.

2) Die Vektoren $\vec{v}$, $\vec{w}$ und $\vec{v} \times \vec{w}$ bilden ein Rechtssystem.
Strecke den rechten Daumen in Richtung $\vec{v} \times \vec{w}$ und schraube mit dem Handgelenk.
Dann wird der Vektor $\vec{v}$ auf dem *kürzeren* Weg zum Vektor $\vec{w}$ gedreht.
Damit ist die *Orientierung* von $\vec{v} \times \vec{w}$ festgelegt.

3) Die Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$ spannen ein Parallelogramm auf.
Der Flächeninhalt A dieses Parallelogramms ist $|\vec{v} \times \vec{w}|$.
Damit ist die *Länge* von $\vec{v} \times \vec{w}$ festgelegt.

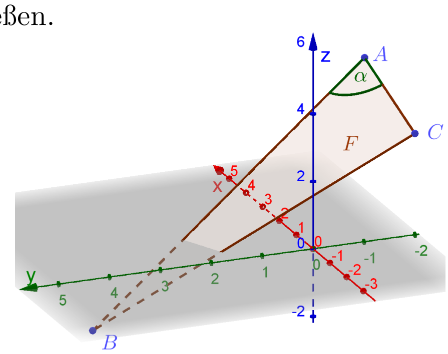


Dreieck

Gegeben ist das Dreieck mit den Eckpunkten $A\,(3 \mid -2 \mid 4)$, $B\,(1 \mid 4 \mid -2)$ und $C\,(0 \mid -2 \mid 3)$.

1) Berechne den Winkel α, den die Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ einschließen.

2) Berechne den Flächeninhalt A des Dreiecks. (Einheiten in cm)



1) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1-3 \\ 4-(-2) \\ -2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix}$, $\quad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0-3 \\ -2-(-2) \\ 3-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (-2) \cdot (-3) + 6 \cdot 0 + (-6) \cdot (-1) = 12$

$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + 6^2 + 6^2} = \sqrt{76}$, $\quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

$\alpha = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{760}}\right) = 64{,}19\ldots^\circ$

2) $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -6 \\ 16 \\ 18 \end{pmatrix}$

$A = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6^2 + 16^2 + 18^2} = 12{,}40\ldots\,\text{cm}^2$